§7 平方根

①平方根とは

②根号を含む式の計算

③有理数と無理数

①平方根とは

・導入

Q1. ある数を2乗したら9になりました。ある数とはいくつでしょう。

A1. 3と-3

＜解説＞

$3^2=9$, $(-3)^2=9$

Q1は整数を2乗した値、例えば0,1,4,9,16, ……であれば綺麗に答えることができますね(マイナスの答えを忘れないように注意)。では、Q2はどうでしょうか。

Q2. ある数を2乗したら5になりました。ある数とはいくつでしょう。

A2. ??? 2.236……

＜解説＞

小数になり永遠に答えが続いてしまってうまく表現できない。

→0,1,4,9,16, ……のような整数の2乗ではない2,3,5, ……といった数に2乗するとなる数をうまく表現する方法を勉強していきます！

2乗(2じょう)：同じ数を2回かけること。平方ともいう。

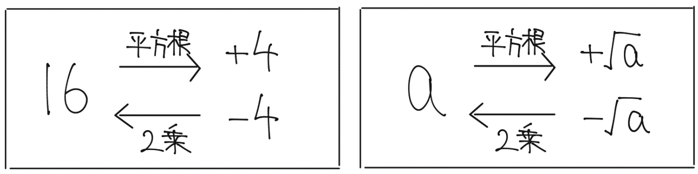
＜用語＞

2 乗して$\boldsymbol{a}$になる数を$\boldsymbol{a}$の平方根と言います。(a>0)

例：16 の平方根は 4 と-4 です。また, 4 と-4 など絶対値が同じで正負の異なるペアは$\pm$4 と表記できます。

絶対値が同じで正負の異なる 2 数$a,\ -a(a \neq 0)$は$\pm a$と表記できる。

＜整理＞



＜注意＞

どんな数を 2 乗しても負の数にはならないから, **負の数の平方根は考えません。ただし, 0 の平方根は 0 のみです。**

例：(正の数)^2＝正の数, (負の数)^2＝正の数

0 以外のどんな数を 2 乗しても正の数になる。

さて、ここからが本題で, 2, 3, 5, ……というような整数の 2 乗ではない数について考えていきましょう。これらの平方根を考える際には、**$\sqrt{\ }$(根号/ルート)**という記号を用います。

＜定義＞

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$を正の数として, $\boldsymbol{a^2 = b}$が成立するとき,

$\boldsymbol{a = \pm\sqrt{b}}$と表します。

前ページ記載の定義から，$\sqrt{a^2} = a$と式変形できます。例えば，$\sqrt{36} = 6$，$-\sqrt{36} = -6$となります。この場合、$\sqrt{36}$は正の数であることに注意しましょう。

<整理>

①正の数の平方根は正負の 2 つある。

②負の数の平方根はない。

③0 の平方根は 0。

負の数の平方根，例えば 2 乗して-1 になる数は高校の数学Ⅱの授業で触れます。

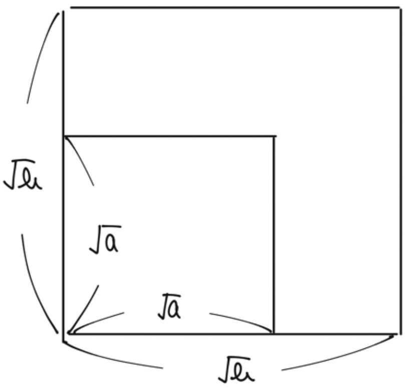
<練習問題 1>

次の(1)～(5)の平方根を求めよう。

(1)49　(2)0.64　(3)$\frac{4}{9}$　(4)11　(5)0

・平方根の大小関係

$a, b(0 < a < b)$を用いて表される，Ｉ辺の長さが$\sqrt{a}$と$\sqrt{b}$の正方形を考えてみよう。Ｉ辺の長さが$\sqrt{a}$と$\sqrt{b}$の正方形の面積はそれぞれa, bです。$a < b$なので，右図を参考にＩ辺の長さを比べることで$\sqrt{b}$の方が$\sqrt{a}$よりも大きいことがわかります。このことより，根号を使った大小関係について以下のことが導き出されます。



$a < b$ ならば $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

a, bの大小関係は$\sqrt{a}, \sqrt{b}$の大小関係と一致する。

上記の根号を用いた大小関係より，以下の様に数の大小を比較することができます。

Q. 5 と$\sqrt{23}$の大小を比較してみよう。

A. $5 > \sqrt{23}$

＜解説＞

$5 = \sqrt{25}$とでき, 25>23 なので$\sqrt{25} > \sqrt{23}$となります。

＜練習問題 2＞

次の(Ｉ)～(5)の大小関係を不等号を使って示しなさい。

(Ｉ) $\sqrt{37}$と$\sqrt{41}$　(2) $\sqrt{51}$と 7　(3) $\sqrt{121}$と ＩＩ

・平方根の近似

面積が３の正方形の１辺の長さは$\sqrt{3}$ですが，これを聞いただけではどれくらいの長さかイメージしにくいですよね。根号で表される値はだいたどれくらいなのかを考えていきましょう。

例：先ほど例に挙げた$\sqrt{3}$を考えてみましょう。
$1.7^2=2.89<3<3.24=1.8^2$ なので$1.7<\sqrt{3}<1.8$と分かります。さらに、$1.73^2=2.9929<3<3.0276=1.74^2$ なので，$1.73<\sqrt{3}<1.74$とすることができます。このように小数を正確にしていくとより正確に評価をする(値がどの範囲にあるのかを考える)ことができます。

上記の様に根号の付いた値の評価するには，ある程度代表的な値を知っておく必要があります。以下の３つ程度は覚えておきましょう。

$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$

$\sqrt{3}=1.7320508\ldots$

$\sqrt{5}=2.2360679\ldots$

＜語呂合わせ＞

一夜一夜に人見頃

人なみにおごれや

富士山麓オウム鳴く

cf. 代表的な値以外の平方根を求める手段として「開平法」というものが存在します。気になる人は調べてみよう。

②根号を含む式の計算

・乗法と除法

＜公式＞

$a>0, b>0$ として,

乗法：$\boldsymbol{\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$

除法：$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$

ここから以上の定義を数式を使って説明していきましょう。以下の証明で用いる$\mathrm{a,b}$は共に正の数です。

＜乗法の証明＞

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

両辺はそれぞれ正より, 2 乗しても等式は成立するので,

$(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{ab})^2$

$a\times b=ab$

$ab=ab$

乗法：掛け算

除法：割り算

証明を書かされることはないですが, 根号を含む式の乗法・除法の公式はしっかり押さえておきましょう。

<除法の証明>

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

両辺はそれぞれ正より，2 乗しても等式は成立するので，

$$(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = (\sqrt{\frac{a}{b}})^2$$

$$\frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

例：

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

また，正の数a, bを用いて$\boldsymbol{\sqrt{a^2b}}$**と表される数は**$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}=a\times\sqrt{b}$と変形できるので，$\boldsymbol{a\sqrt{b}}$**と表せます。**例えば，$\sqrt{20}$は$\sqrt{2^2\times5}$とできるので$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$となります。同様に$2\sqrt{3}$を$\sqrt{12}$と変形することもできます。基本的に、**問題の解答を書くときは，**$\boldsymbol{2\sqrt{5}}$**や**$\boldsymbol{2\sqrt{3}}$**のように根号の外にそれ以上数字を出すことのできない状態にしましょう。**

前ページの乗法・除法と上記の様な根号を含む値の変形はスラスラとできるようにしておきましょう。

<練習問題 3>

以下の(1)～(7)を計算しなさい。

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt{14}$

(3) $\sqrt{6}\div\sqrt{21}$

(4) $\sqrt{5}\times2\sqrt{3}$

(5) $\sqrt{4}\times\sqrt{8}$

(6) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{14}}{3}$

(7) $\sqrt{24}\div\frac{2}{\sqrt{3}}$

根号の中の数字をそれ以上根号の外に出すことはできないか毎回チェックしよう！

・分母の有理化

分母の根号を消して，根号を分子だけにする作業のことを**分母の有理化**と言います。これを行うことで根号を含む値の大小比較がしやすくなるなどのメリットがあります。

例：

$a>0,b>0$としたとき，$\frac{a}{\sqrt{b}}$の分母の有理化を考えます。

どんな数に１をかけてもその数の値は変わらないので$\frac{a}{\sqrt{b}}$に１をかけます。ただし，１のかけ方が問題で，$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}(=1)$をかけます。$\frac{a}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=$

$\frac{a\sqrt{b}}{b}$

このようにすることで分母から根号を取り除くことができます。

例えば，$\frac{2}{\sqrt{3}}$の場合，$\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$とすることができます。

＜練習問題４＞

次の(1),(2)の分母を有理化しなさい。

(1) $\frac{5}{\sqrt{6}}$

(2) $\frac{7}{2\sqrt{11}}$

・分母の有理化の応用

分母が$\sqrt{a}$などの単純な形ではない場合，例えば$\frac{3}{3+\sqrt{5}}$などの形の場合の分母の有理化について考えてみましょう。展開の公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$を利用します。分数が$\frac{?}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$という形の場合は$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$を，$\frac{?}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$という形の場合は$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$を，かけると綺麗に分母の有理化をすることができます。

根号の付いた値を２乗すると根号が外れることを利用する。

例：

$$\frac{3}{3+\sqrt{5}}=\frac{3}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{3(3-\sqrt{5})}{3^2-\sqrt{5}^2}=\frac{9-3\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}(\sqrt{7}+2\sqrt{3})}{\sqrt{7}^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{21}+30}{-5}$$

$$=-\frac{5\sqrt{21}+30}{5}$$

少し複雑な計算になるので気をつけましょう。

・加法と減法

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$などはこれ以上簡単に整理することはできませんが，$\sqrt{2}+3\sqrt{2}$など，根号の中身が共通する場合に限り，さらに整理，つまり加法や減法を行うことができます。

根号の中身が異なる場合は整理できないのでそのままにしておく。

<公式>

$c>0$として，

加法：$\boldsymbol{a\sqrt{c}+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}}$

減法：$\boldsymbol{a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=(a-b)\sqrt{c}}$

例：

$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=(3-7)\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$

$2\sqrt{2}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$3\sqrt{7}+12\sqrt{3}-\sqrt{7}=(3-1)\sqrt{7}+12\sqrt{3}=2\sqrt{7}+12\sqrt{3}$

根号の中身にある数の２乗がある場合，くくり出すと整理のできる場合がある。

・式の値

＜例題＞

$x=\sqrt{3}+\sqrt{5}, y=\sqrt{3}-\sqrt{5}$のとき，$x^2+2xy+y^2$の値と$x^2+xy+y^2$の値を求めよ。

＜解説＞

$x+y=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=2\sqrt{3},$

$xy=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=3-5=-2,$

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(2\sqrt{3})^2=12$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(2\sqrt{3})^2-(-2)=12+2=14$

展開・因数分解公式を使い工夫することで簡単に計算ができるようになります。

・整数部分と小数部分

ある数を(整数)+(小数)の形にしたとき, (整数)を整数部分, (小数)を小数部分と言います。例えば 5.31 の場合, 整数部分は 5, 小数部分は 0.31 です。

例

$\sqrt{5}$の整数部分と小数部分は$2<\sqrt{5}<3$ なので,2 が整数部分, $(\sqrt{5}-2)$が小数部分です。

③有理数と無理数

・有理数とは

＜定義＞

整数mと正の整数nを用いて分数$\frac{m}{n}$で表される数. ただしmとnは互いに素.

*互いに素とは共通因数を1以外に持たない2数のこと。

例：

整数　$-5, 0, 17, \sqrt{9}$ など

分数(有限小数, 循環小数)　$\frac{3}{4}, 1.3, 0.\dot{3}$　など

有理数の定義は大学までずっと使っていくものなので正確に押さえておくこと。

互いに素という表現が難しければ, 約分できない分数$\frac{m}{n}$としても可。

$0.\dot{3}=0.33333\cdots$

・無理数とは

＜定義＞

実数の中で，有理数ではない数，つまり，整数mと正の整数nを用いて分数$\frac{m}{n}$で表されない実数

実数と細かい条件があるが基本的には有理数でない数という認識で問題ない。実数とは有理数と無理数を合わせたもの。

例：

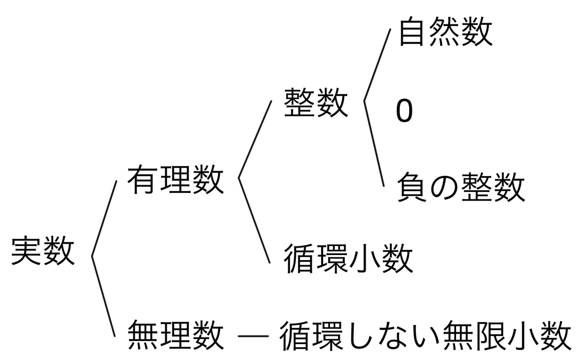
根号を含む値　$\sqrt{3}$, $-2\sqrt{7}$ など

循環しない無限小数　　π（円周率）など

＊整数にならない根号を含む値は循環しない無限小数に含まれている。例えば$\sqrt{3} = 1.7320508075 \ldots$というように循環せず小数が無限に続いていく。

小数が不規則で(循環せず)並んでいるものは無理数になる。一方で規則的にならんできるものは分数で表すことができるので有限小数，つまり有理数である。

有理数と無理数を総称して**実数**という。



<超重要例題>

$\sqrt{2}$が無理数であることを証明せよ。

・背理法

前提となる背理法という知識があります。今後様々な部分で活躍する考え方です。「X が A と B のいずれかであることがわかっている場合, X が A でないことを示すことで X が B である」とします。つまり, **$\sqrt{2}$は有理数か無理数のいずれかなので, $\sqrt{2}$が有理数でないことを示して$\sqrt{2}$が無理数であることを示します。**

＜証明＞

$\sqrt{2}$が無理数でない，つまり有理数であると仮定すると，$\sqrt{2}$は互いに素である整数mと正の整数nを用いて$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$と表される．

有理数の２乗は有理数より$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$の両辺を２乗して，$2=\frac{m^2}{n^2}$が成立することより，$m^2=2n^2$.

$2n^2$(左辺)が偶数よりm^2(右辺)も偶数である．

m^2が偶数であるからmも偶数である．

よって整数kを用いて$m=2k$と表すことができる．

$m^2=2n^2$に代入して

$4k^2=2n^2$.

$2k^2=n^2$

$2k^2$(左辺)が偶数よりn^2(右辺)も偶数である．

n^2が偶数であるからnも偶数である．

今，mとnのいずれも偶数なので,mとnは共通因数２をもつ．

しかし，これはmとnが互いに素であることに矛盾する．

これは$\sqrt{2}$を有理数と仮定したことによるものであるから，この仮定は誤りである．

したがって$\sqrt{2}$は有理数でない．

つまり$\sqrt{2}$は無理数である．（証明終わり）

<練習問題 5>

$\sqrt{3}$が無理数であることを背理法を用いて証明しなさい。

＜解説＞

$\sqrt{3}$が無理数でない，つまり有理数であると仮定すると，$\sqrt{3}$は互いに素である整数mと正の整数nを用いて$\sqrt{3}=\frac{m}{n}$と表される．

有理数の２乗は有理数より$\sqrt{3}=\frac{m}{n}$の両辺を２乗して，$3=\frac{m^2}{n^2}$が成立することより，$m^2=3n^2$.

$3n^2$(左辺)が３の倍数よりm^2(右辺)も３の倍数である．

m^2が３の倍数であるからmも３の倍数である．

よって整数kを用いて$m=3k$と表すことができる．

$m^2=3n^2$に代入して

$9k^2=2n^2$.

$3k^2=n^2$

$3k^2$(左辺)が３の倍数よりn^2(右辺)も３の倍数である．

n^2が３の倍数であるからnも３の倍数である．

今，mとnのいずれも３の倍数なので,mとnは共通因数３をもつ．

しかし，これはmとnが互いに素であることに矛盾する．

これは$\sqrt{3}$を有理数と仮定したことによるものであるから，この仮定は誤りである．

したがって$\sqrt{3}$は有理数でない．

つまり$\sqrt{3}$は無理数である．

